

## Τέταρτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

### ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

#### Θέμα 1

Να αποδείξετε ότι το π.α.τ

$$y' = 1 + y + y^2 \cos x, \quad y(0) = 0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . Μπορεί αυτή η λύση να επεκταθεί σε ένα μεγαλύτερο διάστημα;

#### Θέμα 2

Να αποδείξετε ότι το π.α.τ

$$y' = y \log(1 + |x|) + e^{-x} \log(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στην πραγματική ευθεία.

#### Θέμα 3

Θεωρούμε το π.α.τ

$$y' = x\sqrt{y-3}, \quad y(0) = a, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε το παραπάνω π.α.τ ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων αν

(i)  $a = 3$

(ii)  $a = 4$

Εξετάστε αν η συνάρτηση  $f(x, y) = x\sqrt{y-3}$  είναι Lipschitz σε κάποιο σύνολο της μορφής

$$R = \{(x, y) : |x| \leq \alpha, |y - 3| \leq b\},$$

όπου  $a, b > 0$ . Σχολιάστε πως το συμπέρασμα αυτό επηρεάζει την (i).

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**